Untersuchungen

über

die Bewegung von Flüssigkeiten

in Kapillarröhren.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Johannes Schlie

Dr. phil.

Rostock.

Carl Boldt's Buchdruckerei.

1869.

Bei den Untersuchungen, welche die Hydrauliker zur Bestimmung der Gesetze über den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Röhren anstellten, bedienten sie sich meistens weiterer, und im Verhältniß zur Weite kurzer Röhren. Darauf bezügliche Versuche mit engeren Röhren wurden zuerst von Girard angestellt. Seine Röhren hatten Durchmesser von 1,8 bis 4,2 Millimeter, und erstreckten sich seine Untersuchungen nicht nur auf Wasser, sondern auch auf andere Flüssigkeiten, wie Alkohol, Terpentinöl, Zuckerlösung zc. Indessen konnten dieselben nicht hinreichenden Aufschluß über die Gesetze des Stromlaufs in engen Röhren geben, indem er auf die Strömungserscheinungen innerhalb des Rohrs, die bei Aenderung des Drucks und der Temperatur oft wesentlich andere werden, keine Rücksicht nahm. Der erste, der auch nach dieser Seite hin seine Beobachtungen der genauesten Kontrolle unterwarf, war Poiseuille. Seine Versuche, die unter Bezugnahme auf physiologische Erscheinungen mit bedeutend engeren Röhren, — von 0,015 bis 0,65 Millimeter Durchmesser — angestellt wurden, führten ihn zu einer Formel über die Ausflußgeschwindigkeit, die aber eine Grenze der Gültigkeit fand in Bezug auf Länge und Weite des Rohrs. Die Kommission der Pariser Akademie, die mit der Prüfung seiner Arbeiten beauftragt wurde, konnte das von ihm aufgestellte Gesetz nur für Kapillaren von 0,13 bis 0,27 Millimeter Durchmesser bestätigen. Hagen's Untersuchungen vom Jahre 1854 machten es wahrscheinlich, daß dieselben Gesetze des Stromlaufs auch für weitere Röhren gelten, und die neueren einschlägigen Versuche von Dr. Jacobson*)

*) Müller's Archiv, Jahrgang 1860, pag. 80 und amtlicher Bericht über die 35. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Königsberg im September 1860, pag. 142.

bestätigen diese Thatsache. Die von Poiseuille empirisch gefundene und durch die Theorie bestätigte Formel lautet:

$$c = \frac{16\,\varkappa}{\pi} \cdot \frac{p^0\,\varrho^2}{l} \quad \text{oder} \quad p^0 = K\frac{c\,l}{\varrho^2}$$

wo c die mittlere Ausflußgeschwindigkeit, p^0 den im Anfang des Rohrs stattfindenden Druck, ϱ den Radius, l die Länge des Rohrs und $\varkappa$ und K mit der Temperatur und Beschaffenheit der Flüssigkeit variirende Konstanten bedeuten. Indessen, wie schon gesagt, hat diese Formel eine Grenze, die abhängt von Länge, Durchmesser, Temperatur und Druck. Daß, wie Hagen meint*), diese Grenze sich zu erkennen gebe durch die Schwankungen des austretenden Wasserstrahls, hat Jacobson nicht bestätigen können. Es müßte dann die Grenze ihre Bedingung finden darin, daß die Richtung des Fließens aufhörte, der Axe des Rohrs parallel zu bleiben, so daß der Druck nicht nur längs des Rohrs, sondern auch an verschiedenen Stellen desselben Querschnitts sich änderte. Dann würde er aber eine Funktion des Abstandes sowohl vom Anfang als von der Axe des Rohrs sein. Indem Jacobson den austretenden Strahl auch über Poiseuille's Grenze hinaus klar und durchsichtig fand, überzeugte er sich durch Messung des Drucks im Rohr, daß derselbe auch dann noch eine lineare Funktion des Abstandes von Anfang des Rohrs sein konnte, zumal bei engen Röhren.

Entsprechend der Poiseuille'schen Formel fand Jacobson:

$$c = \frac{1}{8\,\eta} \cdot \frac{p^0\,\varrho^2}{l}$$

wo η, der Koeffizient der inneren Reibung des Wassers bei verschiedenen Temperaturen, dargestellt ist durch den Druck einer Wassersäule auf 1 Quadratmillimeter. Im Allgemeinen, und so lange die Bewegung der Axe des Rohrs parallel bleibt, ist p, oder der Druck im Rohr, eine lineare Funktion von x, der Entfernung vom Anfang des Rohrs, bei engeren Röhren auch noch über die Poiseuille'sche Grenze hinaus; bei

*) Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1854.

weiteren aber sinkt, wie man die Grenze erreicht hat, p^0, der Druck im Anfang, plötzlich unter p, den im weiteren Verlauf des Rohrs herrschenden, hinab, und die Differenzen zwischen p und p^0 werden um so größer, je weiter man sich über diese Grenze hinaus entfernt, d. h. je kürzer das Rohr, oder je größer sein Durchmesser, oder je größer Druckhöhe und Temperatur werden. Im weitern Verlauf des Rohrs erreicht p ein Maximum, und ist von da an wieder eine lineare Funktion von x. Je enger das Rohr, desto näher liegt dies Maximum dem Anfang des Rohrs.

Die Beziehungen, welche zwischen Temperatur, Druck, Länge und Durchmesser bestehen müssen, um die Grenze bestimmen zu können, sind noch nicht mit hinreichender Sicherheit festgestellt. Soviel ergab sich aus den ausgezeichneten Beobachtungen Jacobson's, daß eine Grenzrelation zwischen p^0 und l stattfindet, indem der Druck im Anfang des Rohrs, bei dem die Poiseuille'sche Grenze erreicht ist, proportional ist der Länge des Rohrs. Ebenso stellte sich als wahrscheinlich heraus, daß die Grenzwerthe von η, dem Reibungskoeffizienten, proportional sind den Quadraten der Radien.

Was die Beziehungen betrifft, in denen die Druckhöhe h im Reservoir zur mittleren Ausflußgeschwindigkeit steht, so haben Hagen und Jacobson beide ausgezeichnete Beobachtungen zu ihrer Ermittelung gemacht. Hagen kam zu der Gleichung:

$$h = \frac{\mu}{\varrho\,\gamma} + \beta\,\frac{l\,\varrho^2}{(\varrho - \alpha)^4}\,c + (\alpha^1 + \beta^1 l)\,\frac{\varrho^4}{(\varrho - \alpha)^4}\,c^2$$

wo $\frac{\mu}{\varrho\,\gamma}$ einen kapillaren Gegendruck von der Ausflußöffnung her, α die Dicke einer an der Wand ruhenden Schicht Wassers, die er auf $\frac{1}{64}'''$ berechnete, β α^1, β^1, Konstante bedeuten sollen. Jacobson's Beobachtungen ließen sich genau nach einer Formel:

$$h = sc + tc^2$$

darstellen, so daß die Hinzufügung eines konstanten, von c unabhängigen Gliedes ihm nicht gerechtfertigt schien. Daß auch in Wirklichkeit kein kapillarer Gegendruck von der Aus-

flußöffnung her stattfinde, wies er experimentell nach, indem bei Versuchen, in denen der austretende Strahl unter Wasser und in der Luft aufgefangen wurde, sich vollkommen dieselbe Geschwindigkeit zeigte.

Nach der von Prof. Neumann entwickelten Theorie über die Relation zwischen h und c, in Betreff deren ich auf ihre Veröffentlichung in den Jacobson'schen Arbeiten verweise, läßt sich folgende Formel aufstellen, in der D die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet:

$$gh = c^2 + \frac{8\,\eta\,l}{D\,\varrho^2}\,c$$

Diese Formel stimmt, wie man sieht, im Allgemeinen mit der von Jacobson empirisch gefundenen überein. Nach der Theorie müßte $s = \frac{8\,\eta\,l}{g\,D\,\varrho^2}$ oder $sc = p^0$ sein, und in der That fand sich dies in seinen Beobachtungen bestätigt. Zugleich war damit nachgewiesen, daß Hagen's Annahme von einer an der Wand des Rohrs ruhenden Wasserschicht eine ungerechtfertigte sei. Da ferner der die erste Potenz von c enthaltende Ausdruck den Druck im Rohr bezeichnet, so ist hiemit auch der bis dahin bei den Hydraulikern übliche unklare Ausdruck: „Widerstandshöhe" definirt, und die alte Annahme, daß dieselbe eine Funktion der ersten und zweiten Potenz der Geschwindigkeit sei, widerlegt, wie Hagen schon vermuthet hatte. — Was den Koeffizienten t von c^2, der nach der Theorie gleich $\frac{1}{g}$ sein müßte, anbetrifft, so konnte Jacobson nichts weiter über ihn feststellen, als daß er unabhängig von der Temperatur und der Länge des Rohrs wäre.

Dies ist das Wesentlichste und Wichtigste, was über die Theorie des Ausflusses aus Kapillaren bis jetzt bekannt ist. Da die Aufmerksamkeit der Physiker besonders darauf gerichtet war, die Gesetze dieses Ausflusses in Bezug auf ihre Abhängigkeit von den Dimensionen des Rohrs, der Druckhöhe 2c. zu erforschen, so lag es natürlich am nächsten, sich hiebei des Wassers, als des am wenigsten störende Elemente in den Gang der Untersuchung einführenden Mediums zu bedienen.

Berechnet man die Ausflußgeschwindigkeit nach der Formel

$$c = \frac{p^0}{8 \eta l} \varrho^2$$

so sind p^0, l, ϱ^2 gegebene Data. Die Beziehungen, mittelst deren wir η, den Reibungskoeffizienten bestimmen können, sind uns noch unbekannt. Ist c bekannt, so folgt:

$$\eta = \frac{p^0}{8 c l} \varrho^2$$

oder, so lange die Strömung der Axe des Rohrs parallel bleibt, wenn x die Entfernung vom Anfang, p den betreffenden Druck bezeichnet:

$$\eta = \frac{p \varrho^2}{8 c (l - x)}$$

Die Abhängigkeit der innern Reibung von der Temperatur berechnet sich nach Poiseuille's Beobachtungen, auf Quecksilberdruck reduzirt und für das Intervall von 0° bis 45° C:

$$\varkappa = 1836{,}724 \, (1 + 0{,}033679 \, t + 0{,}0002209 \, t^2)$$

folglich, wenn wir die Zahl auf Wasserdruck reduziren, D die Dichte des Wassers, $\triangle$ die des Quecksilbers bezeichnet:

$$\eta = \frac{\pi g D \triangle}{128 \varkappa}$$

$$\eta = \frac{g D}{5511{,}3} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}033679 \, t + 0{,}0002209 \, t^2}$$

Es ist auffallend, daß die Methode der Bestimmung des Reibungskoeffizienten der Flüssigkeiten durch Versuche mit Kapillarröhren nicht auch auf andere Flüssigkeiten, als destillirtes Wasser ausgedehnt ist. Freilich hat, wie oben erwähnt, schon Girard mit verschiedenen Salzlösungen und Flüssigkeiten operirt. Allein, einerseits war damals die Theorie der Kapillaren überhaupt noch nicht hinreichend entwickelt, so daß er die Grenzrelationen zwischen den die Ausflußgeschwindigkeiten bestimmenden Faktoren nicht berücksichtigen konnte, andrerseits stellte er diese Untersuchungen von wesentlich andern Gesichtspunkten aus an. Meines Wissens sind außer von ihm und Poiseuille keine Versuche gemacht worden, nach welchen die

innere Reibung verschiedener Flüssigkeiten, besonders der Salzlösungen, mit einander verglichen werden könnte.

Von diesem Gesichtspunkte aus unternahm ich auf Anregung des Herrn Professor Schulze, dem ich hiemit für die mir von ihm gewordene Anregung und Unterstützung meinen herzlichen Dank sage, eine Anzahl von Versuchen mit einigen Salzlösungen, und mit destillirtem Wasser, um das Verhältniß der innern Reibung dieser Flüssigkeiten zu der des Wassers im Allgemeinen festzustellen. Die mir zu Gebote stehenden geringen Mittel, in Folge deren häufige zeitraubende Wiederholungen der Versuche und Reinigungen des Apparats vorgenommen werden mußten, gestatteten mir nicht, meine Versuche über Wasser und nur wenige Salzlösungen hinaus auszudehnen, ebensowenig, wie ich wegen der nur annähernden Genauigkeit der Resultate im Stande war, die mathematischen Beziehungen der Verhältnisse der Reibungskonstanten zu bestimmen. Indessen hoffe ich doch, mit meiner Arbeit den Impuls zu größerer Ausdehnung dieser Versuche gegeben zu haben, da sie wie ich glaube, zu höchst interessanten Schlußfolgerungen über die Natur der Kohäsion von Flüssigkeiten führen können.

Gemacht wurden der Beobachtungen ca. 400. Bei ihrer Zusammenstellung und im Laufe der Untersuchung stellte es sich aber heraus, daß eine große Anzahl derselben gestrichen werden mußte, so daß ich im Ganzen nur ungefähr 240 benutzt habe. Die Flüssigkeiten, mit denen ich operirte, waren destillirtes Wasser, eine ungefähr einprozentige und eine fünfprozentige Kochsalzlösung, und eine fünfprozentige Chlorkaliumlösung, d. h. auf 100 Kubik-Centimeter kamen 1, resp. 5 Gramme Salz. Die Einrichtung des Apparats war höchst einfach, und ungefähr folgende:

Aus einem mit seitlichem Tubulus versehenen Glasgefäß ragte ein weites, rechtwinklig nach unten gebogenes Glasrohr, an dessen abwärts steigendem Schenkel vermittelst Kautschukverbindung das Kapillarrohr angefügt war. Da, wie gesagt, die Versuche auf eine nur allgemeine Vergleichung der Reibungskonstanten sich beschränken mußten, so war es nicht nothwendig,

daß das Rohr horizontal gelegt wurde. Der Einfluß der Schwere, der bei den Versuchen der oben genannten Physiker sich in störender Weise würde geltend gemacht haben, konnte hierbei vernachlässigt werden. Denn einerseits mußte er bei den verschiedenen Flüssigkeiten derselbe sein, andererseits wurde nur mit einem einzigen Rohr gearbeitet, so daß der Einfluß, den Weite und Länge desselben auf die Wirkung der Schwere vielleicht ausüben könnten, ebenfalls durch die Gleichheit der Dimensionen paralysirt wurde.

Das Kapillarrohr selbst war umgeben von einem ungefähr 1 Dezimeter weiten, ca. 5 Dezimeter langen Cylinder, dessen Boden durchbohrt und mit einem durchbohrten Kautschukkork geschlossen wurde. In der Durchbohrung des letzteren war ein weiteres kurzes Glasrohr befestigt, an dessen oberes in den Cylinder hineinragendes Ende das Kapillarrohr wieder mittelst Kautschukverbindung angesetzt war. Das untere Ende des im Kautschukkork befestigten Glasrohrs war in eine hinlänglich feine Spitze ausgezogen, so zwar, daß das Ausströmen der Flüssigkeit ungehindert vor sich gehen, zugleich aber beim langsamen Fließen der Luft sich nicht hindurchdrängen konnte, und auf diese Art vielleicht ein unregelmäßiges Ausfließen aus dem Kapillarrohr in das weitere Ansatzrohr bewirkt hätte. Der Cylinder sollte zur Regulirung der Temperatur dienen: zu dem Zwecke wurde er mit Wasser gefüllt, soweit, daß das Kapillarrohr rings davon umgeben war; ein im Wasser hängendes Thermometer diente zur Bestimmung der beim Versuch angegebenen Temperatur. Vergleiche der Temperatur der Flüssigkeit im Reservoir, im Cylinder und an der Ausflußöffnung zeigten so geringe Differenzen, daß die dadurch bedingten Differenzen der Ausflußgeschwindigkeiten jedenfalls innerhalb des Bereichs der Beobachtungsfehler fielen, umsomehr, da bei den Versuchen nie eine künstlich erzeugte Wärme angewandt wurde, vielmehr die Temperatur genommen wurde, wie sie die umgebende Luft dem Apparate mitgetheilt hatte. Vorgenommen wurden die Versuche zu Anfang bei niederen Temperaturen in der freien Luft, später in einem

abgelegenen Zimmer, das seine Temperatur im Ganzen nur langsam änderte.

Was die Beschaffenheit des Rohrs anbetraf, so zeigte es sich unter dem Mikroskop außerordentlich regelmäßig glatt und kreisförmigen Querschnitts. Die größten bemerkten Differenzen im Durchmesser betrugen höchstens 0,03 des ganzen. Der letztere wurde bestimmt durch das Gewicht eines Quecksilberfadens von gemessener Länge. Die verschiedenen, an verschiedenen Stellen des Rohrs gemessenen Längen des Fadens ergaben einen mittleren Durchmesser von 0,496 Millimeter. Die Länge betrug 398 Millimeter, und da die Temperatur nie über 22° C. stieg, so ist als sicher anzunehmen, daß Poiseuille's Grenze nicht überschritten wurde. — Die Ausflußgeschwindigkeit wurde berechnet aus der in einer bestimmten Zeit ausgeflossenen und gewogenen Flüssigkeitsmenge. Indem ich den Sekundenzeiger der Uhr beobachtete, und im bestimmten Augenblick schnell das Gefäß unterschob, und es dann so stellte, daß die mittelst Kautschuk bewegliche Spitze des Ansatzrohrs die Wand des zur Aufnahme bestimmten Glaskolbens berührte, ließ sich ein regelmäßiges kontinuirliches Ausfließen erzielen. Beim Schluß der Beobachtung wurde das Gefäß ebenso schnell wieder entfernt. Der bei der Zeitbeobachtung mögliche Fehler konnte im Ganzen eine Sekunde betragen, wodurch ein Fehler in der Ausflußquantität von höchstens 30 Milligrammen möglich wurde. Meistens wurden indessen mehrere Beobachtungen bei gleicher Temperatur gemacht, die fehlerhaftesten überhaupt ausgeschieden und von den andern das Mittel genommen — und dann betrug die Differenz der Ausflußmenge bei 0°,1 Temperaturunterschied schon weit mehr, da die Ausflußzeit 10, bei den meisten Beobachtungen 15 Minuten betrug. Hatten sich in dieser Zeit Temperaturdifferenzen — von höchstens 0°,2 — gezeigt, so wurde aus der im Anfang und am Ende beobachteten Temperatur das Mittel genommen.

Die Beobachtungen geschahen bei konstantem Niveau. Da es auf eine außerordentliche Genauigkeit der Versuche nicht so sehr ankam, so wurde dies dadurch konstant erhalten, daß

ich von Zeit zu Zeit, ungefähr jede Minute, wieder einige Tropfen auf die Oberfläche im Reservoir goß, so daß dieses immer reichlich bis an den Rand gefüllt war.

Eine besondere Schwierigkeit bot das Reinhalten der Flüssigkeit und damit des Rohrs dar. Obgleich die Oberfläche im Reservoir ziemlich klein war und soweit möglich bedeckt gehalten wurde, die Flüssigkeiten zu wiederholten Malen filtrirt wurden, war es doch nicht möglich, in der Luft umherschwimmende Staubtheilchen soweit abzuhalten, daß sie nicht in das Reservoir und von da in das Kapillarrohr gelangten. Indessen, da ich stets bei nahe konstanter, sehr langsam zu- oder abnehmender Temperatur arbeitete, so machten sich solche Verunreinigungen des Rohrs sofort durch bedeutende Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit bemerkbar. Nach alsdann vorgenommener Reinigung des Rohrs, die durchschnittlich täglich geschah, bestätigte es sich durch stets wieder erhöhte Geschwindigkeit, daß die Abnahmen nicht in einer vielleicht von der einfachen Einrichtung des Apparats herrührenden Unregelmäßigkeit des Fließens, sondern in der Verstopfung des Rohrs ihren Grund fanden. Ich habe deßhalb, wenn sich bei gleicher Temperatur erhebliche Differenzen der Ausflußgeschwindigkeiten zeigten, stets nur die Maxima derselben berücksichtigt.

Danach habe ich in den folgenden beiden Tabellen die Geschwindigkeiten des Wassers und der Salzlösungen in Millimetern bei der dabei bezeichneten Temperatur zusammengestellt. Die mit n überschriebene Spalte enthält die Anzahl der Beobachtungen, welche bei der Berechnung der Ausflußgeschwindigkeiten in Betracht gezogen wurden.

Die Beobachtungen der ersten Tabelle, welche die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers bei niederen Temperaturen angiebt, sind bei etwas größerer Druckhöhe gemacht, als die übrigen, welche alle bei gleicher Druckhöhe angestellt sind. Das Verhältniß der beiden Druckhöhen berechnete sich durchschnittlich auf 1,05757. Danach sind in der zweiten Tabelle beim Wasser einige Data ergänzt; sie sind durch das Fehlen der Beobachtungsanzahl bezeichnet.

°C	c	n	°C	c	n	°C	c	n
0,2	20,90	1	4,8	24,58	2	15,9	33,07	1
0,4	20,98	1	4,9	24,74	1	16,0	33,57	1
0,5	21,24	1	5,0	24,86	2	16,4	34,01	1
0,6	21,33	2	5,6	25,22	2	16,6	34,45	1
2,7	23,13	1	6,2	25,48	2	17,3	34,73	1
2,9	23,16	3	6,8	26,31	2	17,4	34,95	1
3,0	23,23	4	6,9	26,34	1	18,1	35,16	1
3,2	23,40	1	7,0	26,37	1	18,5	35,33	1
3,3	23,53	1	7,4	26,50	4	18,6	35,47	1
3,6	24,15	3	9,8	28,03	1	18,7	35,60	1
3,7	24,33	1	9,9	28,56	3	19,0	35,88	1
3,9	24,42	2	10,6	29,19	1	19,1	35,93	1
4,2	23,64	3	10,7	29,29	3	19,4	36,11	3
4,3	23,85	2	11,6	30,18	1	19,8	36,33	1
4,4	24,04	3	12,8	31,04	1	20,0	36,72	1
4,5	24,36	1	14,8	32,62	1	20,8	37,03	1
4,6	24,16	3	15,2	32,84	1	21,0	37,57	3
4,7	24,38	2	15,8	32,92	2			

Tabelle II.

°C	Wasser.	n	1 % Na Cl.	n	5 % Na Cl.	n	5 % K Cl.	n
15,2	31,06		30,59	1				
15,4							32,36	1
15,5			30,64	1			32,45	1
15,6			30,65	1			32,53	1
15,8	31,13		31,01	3				
15,9	31,27		31,26	1				
16,0	31,74		31,29	1				
16,1	32,22	1						
16,2							33,55	1
16,3							33,56	1
16,4							33,61	3
16,6	32,58		31,58	3	30,17	1	33,76	2
16,7	32,74	1	31,62	2			33,82	1
16,8			31,63	5	30,30	1	34,47	1
16,9			31,72	5				
17,0			31,92	1				
17,1			31,96	1				
17,2			32,01	3				
17,3	32,76	1	32,01	1				
17,4	32,81	1	32,13	2				
17,5	32,89	2	32,14	1	30,45	3		
17,6	33,15	3	32,23	1	31,00	2		
17,8	33,25	1						
18,0					31,02	1		
18,2					31,04	1		
18,5	33,41		32,28	4				
18,6	33,57							
18,8	33,61							
19,0	33,92						34,57	2
19,1	33,98		33,20	5			34,89	1
19,4	34,14						35,00	1
19,6							35,17	1
19,7	34,74	3			32,00	2		
19,8	35,16	1			32,12	2		
19,9					32,17	2		
20,5	35,21	3						

Die Ausflußgeschwindigkeiten der Salzlösungen sind auf denselben Druck reduzirt, bei dem das Wasser ausfloß. Ich habe angenommen, daß unter sonst gleichen Umständen die Ausflußgeschwindigkeiten sich verhalten wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Der hierdurch entstandene Fehler kann vernachlässigt werden, da die Geschwindigkeit nur sehr gering war. Die spezifischen Gewichte wurden durch das Pyknometer ermittelt: Das der Chlorkaliumlösung zu 1,0293, der verdünnteren Kochsalzlösung zu 1,00719, der konzentrirteren zu 1,033613.

Die erste Tabelle zeigt bei 3°,9 C. ein Maximum, und bald darauf bei ca. 4°,2 ein Minimum der Ausflußgeschwindigkeit, abweichend von Girard's und Poiseuille's Versuchen. Es sind zwischen 4 und 5° C. im Ganzen 17 Beobachtungen gemacht worden. Es ergaben sich aus den einzelnen unmittelbar die Geschwindigkeiten:

bei 4°,2 C.	23,73.	23,53.	23,67.	Mittel: 23,64.
4°,3	23,82.	23,88.		23,85.
4°,4	23,95.	24,06.	24,10.	24,04.
4°,5	24,36.			24,36.
4°,6	24,04.	24,16.	24,27.	24,16.
4°,7	24,21.	24,54.		24,38.
4°,8	24,35.	24,81.		24,58.
4°,9	24,74.			24,74.

Ich würde annehmen, daß die geringere Strömung eine Folge der Ungenauigkeit des Apparats und der subjektiven Störungen sei; allein einerseits sind die Beobachtungen zu drei verschiedenen Zeiten gemacht, nachdem zwischendurch abwechselnd höhere und niedere Temperaturen geherrscht hatten, die Resultate lieferten, welche mit den später erhaltenen durchaus hinreichend übereinstimmten; andererseits sind die Differenzen der zur selben Temperatur gehörigen Beobachtungen nicht wesentlich größer, als bei den späteren Beobachtungen; und, wie man sieht, steigen die Mittelwerthe mit Ausnahme eines einzigen ganz regelmäßig. Findet aber in dieser Temperaturregion so nahe bei einander in der That ein Maximum und Minimum statt, so ist es erklärlich, daß die Fehler ver-

hältnißmäßig weit unregelmäßiger sein müssen. Berücksichtigt man ferner, daß bei 4°,5 nur eine Beobachtung gemacht wurde, daß bei dieser die Ausflußzeit 6 Minuten betrug, während sie bei den übrigen theilweise 10 Minuten dauerte, so mag dies die Abweichung des erhaltenen Werthes begründen. Ob das Minimum nun plötzlich oder allmählich eintritt, und wo es eigentlich liegt, darüber liegen mir keine Anhaltspunkte vor, da mir die Beobachtungen bei den unmittelbar vorhergehenden Temperaturen fehlen. Es möchte auch vielleicht die hier gewählte Art und Weise des Experimentirens zu unsicher sein, um so feine Differenzen der Geschwindigkeit mit Sicherheit festzustellen. Jedenfalls scheint es mir wahrscheinlich, daß in dieser Temperaturregion Unregelmäßigkeiten in der Zunahme der Geschwindigkeit stattfinden.

Die mit der Prüfung der Poiseuille'schen Versuche betraute Kommission spricht sich gelegentlich der Poiseuille'schen Nichtbestätigung dieses Minimums dahin aus*), daß es als erwiesen zu betrachten sei, daß die Dichtigkeit der Flüssigkeit auf ihre Geschwindigkeit in engen Röhren keinen, oder wenigstens unmerklichen Einfluß habe, und findet eine Bestätigung dafür in den Versuchen, die Poiseuille mit Gemischen aus Alkohol und Wasser anstellte. Mit steigendem Wassergehalt nimmt zwar Anfangs die Ausflußgeschwindigkeit ab, nachher aber wächst sie fortwährend, obgleich das spezifische Gewicht und die Kapillarität schon von vorne herein gestiegen ist. Hieraus folgt allerdings, daß die Dichte der Flüssigkeit keinen Einfluß erster Ordnung auf die innere Reibung ausübt, aber auch nicht die Kapillarität. Jedenfalls ist außer der Schwere, und der Adhäsion an das Glas von wesentlichem Einfluß auf die Geschwindigkeit oder vielmehr die innere Reibung im Rohr die Kohäsion der betreffenden Flüssigkeit. Wie groß die Wirksamkeit derselben sein muß, erhellt schon daraus, daß, da die Geschwindigkeit dem Quadrat des Radius proportional ist, die Bewegung nicht gleichförmig im ganzen Rohr, sondern in konzentrischen Schichten um die Axe verschieden ist. Die Differenz

*) Poggendorf's Annalen, Band 58, pag. 436.

der Geschwindigkeit der einzelnen benachbarten Schichten wird also der Kohäsion wohl umgekehrt proportional sein, so daß also bei wachsender Kohäsion diese Differenzen und mit ihnen zugleich die mittlere Geschwindigkeit geringer werden müssen. Es läßt sich annehmen, daß beim Vermischen des Alkohols mit Wasser je nach der zugesetzten Volummenge des letzteren die Kohäsion des Gemisches eine andere wird, und zwar zunimmt mit der bekannten Kontraktion; sie würde also am größten sein bei dem Gemisch, bei welchem das Maximum der Kontraktion stattfindet. Die Kapillarität wird wachsen mit zunehmendem Wassergehalt. Wenn nun das mit wachsender Kohäsion eintretende Abnehmen der Geschwindigkeit das durch das Steigen der Kapillarität bedingte Zunehmen überwiegen kann, so wird mit dem Maximum der Kohäsion ein Minimum der Ausflußgeschwindigkeit zusammenfallen; und in der That bemerkte Poiseuille das letztere bei dem Gemisch, bei welchem Rudberg das Maximum der Kontraktion gefunden hat.

Vielleicht könnte ein ähnlicher Vorgang beim Wasser in der Temperaturregion von 4° C. stattfinden. Nimmt man die Temperaturen zu Abszissen, die Ausflußgeschwindigkeiten zu Ordinaten, so würde sich nach meinen Beobachtungen eine Geschwindigkeitskurve von der Gestalt der Fig. 1. ergeben.

Die Ordinaten zu den nicht bezeichneten Abszissen sind nach der Wahrscheinlichkeit ergänzt; die geringe Unregelmäßigkeit zwischen 4°,2 und 4°,6 beruht wohl auf Beobachtungsfehlern. — Die Kurve würde also ein Maximum haben ungefähr bei 3°,9 und von da herabsteigen bis ca. 4°,2. Wäre die Dichte das allein bestimmende Moment bei dieser Schwankung, so dürfte die Kurve nur ein Minimum, kein Maximum zeigen. Der Wechsel der Ab- und Zunahme kann wohl nur durch gleichzeitige Aenderungen der Kohäsion bewirkt werden. Enthielte das Wasser bis zu 4° C. gar noch Eismolekule, so wäre es nicht unmöglich, daß die Kohäsion in der Nähe von 4° schnell wüchse, zumal wenn dann noch plötzliche innere Aktionen durch das Verschwinden der Eismolekule oder durch Bindung von Wärme hinzukämen. Denken wir uns sonst die Kapillarität durch allmähliche Zunahme der

Temperatur gleichmäßig wachsend, so würde, wenn in Fig. 2. die Ordinaten der oberen Kurve die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche durch die Temperaturerhöhung allein bedingt würden, wenn die zwischen beiden Kurven enthaltenen Ordinaten-Abschnitte die durch die Kohäsion bedingten Abnahmen der Geschwindigkeit bezeichnen, — die resultirende Geschwindigkeitskurve etwa die Gestalt der unteren Kurve erhalten können. (S. Fig. 2.)

Indessen gehören Betrachtungen der Art, durch Versuche nicht gehörig bestätigt, wohl noch zu sehr dem Bereiche der Spekulation an. Jedenfalls dürfte es sich empfehlen, mit genaueren Apparaten diese Fragen näher zu untersuchen.

Vergleicht man die Ausflußgeschwindigkeiten der Chlorkaliumlösung mit denen des Wassers, so stellt sich die überraschende Thatsache heraus, daß erstere schneller floß als letzteres, und zwar bei den beobachteten Temperaturen durchweg. Die Erscheinung ist so konstant, daß, da das Niveau nicht geändert wurde, — die angegebenen Geschwindigkeiten sind natürlich, wie schon gesagt, auf dieselbe Druckhöhe reduzirt, die das Wasser hatte — ich es für kaum möglich halte, daß sie auf den Beobachtungsfehlern beruhen sollte; selbst die fehlerhaftesten Beobachtungen ergaben doch noch eine größere Geschwindigkeit, als das Wasser zeigte. Den Grund hierfür anzugeben dürfte bis jetzt wohl auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen. Vielleicht ist es der Einfluß der Schwere, der sich wegen der senkrechten Stellung des Rohrs hätte geltend machen und dadurch ähnliche Bedingungen hervorrufen können, welchen in einem Widerstand leistenden Medium die frei fallenden Körper unterliegen. Die Stelle des Mediums würde in diesem Falle die reibende Glaswand vertreten. Indessen ist dann nicht einzusehen, warum die konzentrirtere Kochsalzlösung als die schwerere nicht noch schneller hätte fließen sollen, zumal dieses Salz leichter löslich ist, als das Chlorkalium, und man daher annehmen sollte, daß die innere Reibung um so viel geringer wäre. Die Schwere scheint also das schnellere Fließen trotz der Stellung des Rohrs nicht zu motiviren; ebensowenig hat wohl die Löslichkeit der Salze Einfluß auf ihre Bewegung.

Es ist jedenfalls eine merkwürdige Thatsache, daß Chlorkaliumlösung schneller fließt, als Wasser, und doch dieses wieder, wie ein Blick auf die Tabelle zeigt, schneller, als Kochsalzlösung. Vergleicht man die beiden Kochsalzlösungen mit einander, so fließt, wie zu erwarten, die verdünntere schneller, als die konzentrirtere. Vielleicht würden vergleichende Untersuchungen mit Salzlösungen desselben Metalls einerseits mit verschiedenen Säuren, andererseits derselben Säure mit verschiedenen Metallen Aufschluß darüber geben können, ob die Größe der Aequivalentzahlen, verbunden mit der größern oder geringeren Löslichkeit, ob die Menge des gebundenen Krystallwassers, die sich mit der Konzentration vielleicht ändert, u. s. w. für die Ausflußgeschwindigkeit maßgebende Faktoren sind oder nicht.

Beachtet man die verschiedenen Beschleunigungen der Geschwindigkeit durch die Temperatur, so wird man finden, daß letztere anf das Wasser weit bedeutender wirkt, als auf die Salzlösungen. Ja, es scheint danach, als ob bei höheren Temperaturen das Wasser schließlich doch schneller fließen wird, als die Kalilösung. Man wird dies schon aus der Angabe weniger Differenzen sehen:

16°,6 C.	1,18 mm.
16°,7	1,08
19°,0	0,65
19°,4	0,15

Die Ursachen aller dieser Erscheinungen werden uns wohl kaum eher klar werden, als bis unsere Forschungen tiefer in das Gebiet der Molekularkräfte eingedrungeu sind. Stellt man zu diesem Zweck Untersuchungen an mit Flüssigkeiten, so scheint sich kaum ein passenderes und bequemeres Verfahren zu empfehlen, als die Benutzung von Kapillarröhren. Wenn nun die vorliegende Arbeit sich auch nur auf die Vorführung einiger Thatsachen beschränken mußte, welche noch weiterer Bestätigung durch genauere Untersuchungen bedürfen, so hoffe ich doch, daß sie wenigstens Andere zu eingehenderen Versuchen dieser Art anregen möge, da solche gewiß viel des Wichtigen und Interessanten zur Kenntniß der bedeutendsten Vorgänge in der Natur beitragen werden.

Fig. 1.

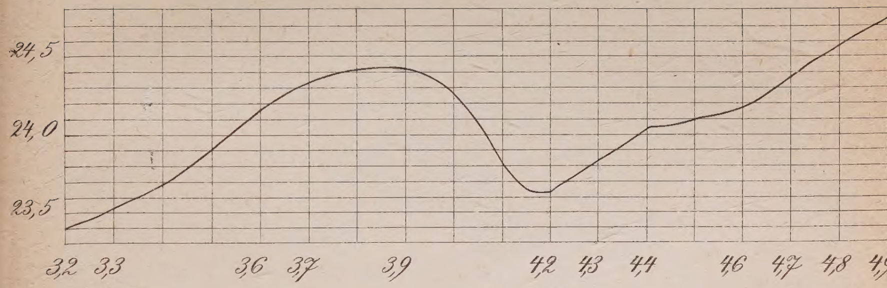


Fig. 2.

